SOLUCIÓN Mediante el teorema A y la regla de la cadena, tenemos

$$D_x y = 2D_x x^{5/3} + D_x(x^2 + 1)^{1/2}$$
$$= 2 \cdot \frac{5}{3} x^{5/3-1} + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{1/2-1} \cdot (2x)$$
$$= \frac{10}{3} x^{2/3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$ ■

Revisión de conceptos

1. De la relación implícita $yx^3 - 3y = 9$ puede despejarse y resultando $y =$ _____.

2. La derivación implícita de $y^3 + x^3 = 2x$ con respecto a x da _____ $+ 3x^2 = 2$.

3. La derivación implícita de $xy^2 + y^3 - y = x^3$ respecto a x da _____ = _____.

4. La regla para la potencia con exponentes racionales dice que $D_x(x^{p/q}) =$ _____. Esta regla, junto con la regla de la cadena, implica que $D_x[(x^2 - 5x)^{5/3}] =$ _____.

Conjunto de problemas 2.7

Suponiendo que en los problemas del 1 al 12 cada ecuación define una función derivable de x, encuentre $D_x y$ por medio de la derivación implícita.

1. $y^2 - x^2 = 1$ **2.** $9x^2 + 4y^2 = 36$

3. $xy = 1$

4. $x^2 + \alpha^2 y^2 = 4\alpha^2$, donde α es una constante.

5. $xy^2 = x - 8$ **6.** $x^2 + 2x^2 y + 3xy = 0$

7. $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$ **8.** $x^2 y = 1 + y^2 x$

9. $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$ **10.** $x\sqrt{y + 1} = xy + 1$

11. $xy + \operatorname{sen}(xy) = 1$ **12.** $\cos(xy^2) = y^2 + x$

En los problemas del 13 al 18 encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto que se indica (véase el ejemplo 3).

13. $x^3 y + y^3 x = 30; (1, 3)$

14. $x^2 y^2 + 4xy = 12y; (2, 1)$

15. $\operatorname{sen}(xy) = y; (\pi/2, 1)$

16. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4; (1, 0)$

17. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2; (1, -1)$

18. $\sqrt{y} + xy^2 = 5; (4, 1)$

En los problemas del 19 al 32 encuentre dy/dx

19. $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$ **20.** $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{7/2}$

21. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **22.** $y = \sqrt[4]{2x + 1}$

23. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$ **24.** $y = (x^3 - 2x)^{1/3}$

25. $y = \dfrac{1}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$ **26.** $y = (3x - 9)^{-5/3}$

27. $y = \sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x}$ **28.** $y = \sqrt{x^2 \cos x}$

29. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 \operatorname{sen} x}}$ **30.** $y = \sqrt[4]{1 + \operatorname{sen} 5x}$

31. $y = \sqrt[4]{1 + \cos(x^2 + 2x)}$ **32.** $y = \sqrt{\tan^2 x + \operatorname{sen}^2 x}$

33. Si $s^2 t + t^3 = 1$, encuentre ds/dt y dt/ds

34. Si $y = \operatorname{sen}(x^2) + 2x^3$, encuentre dy/dx.

35. Dibuje la gráfica de la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$, y luego encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes que pasan por el origen.

36. Determine la ecuación de la **recta normal** (recta perpendicular a la recta tangente) a la curva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ en $(3, 1)$.

37. Suponga que $xy + y^3 = 2$. Entonces, derivando implícitamente dos veces con respecto a x, por pasos se obtiene:

(a) $xy' + y + 3y^2 y' = 0$;

(b) $xy'' + y' + y' + 3y^2 y'' + 6y(y')^2 = 0$.

Despeje y' de (a) y sustituya en (b) y después despeje y''

38. Encuentre y'', si $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$ (véase el problema 37).

39. Encuentre y'' en $(2, 1)$, si $2x^2 y - 4y^3 = 4$ (véase el problema 37).

40. Utilice derivación implícita dos veces para encontrar y'' en $(3, 4)$, si $x^2 + y^2 = 25$

41. Demuestre que la recta normal a $x^3 + y^3 = 3xy$ en $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pasa por el origen.

42. Demuestre que las hipérbolas $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ se intersecan en ángulos rectos.

43. Demuestre que las gráficas de $2x^2 + y^2 = 6$ y $y^2 = 4x$ se intersecan en ángulos rectos.

44. Suponga que las curvas C_1 y C_2 se intersecan en (x_0, y_0) con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, como se muestra en la figura 4. Entonces (véase el problema 40 de la sección 0.7) el ángulo positivo q de C_1 (es decir, desde la recta tangente a C_1 en (x_0, y_0)) a C_2 satisface

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

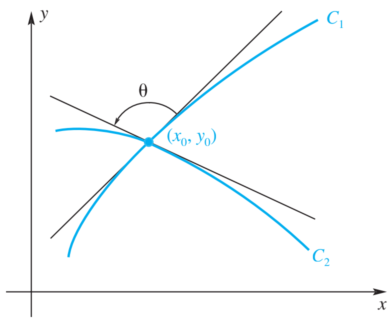

Figura 4

Encuentre los ángulos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ a la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en los dos puntos de intersección.

45. Encuentre el ángulo de la recta $y = 2x$ a la curva $x^2 - xy + 2y^2 = 28$ en su punto de intersección en el primer cuadrante (véase el problema 44).

46. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x, de modo que su posición x y velocidad $v = dx/dt$ satisfacen

$$m(v^2 - v_0^2) = k(x_0^2 - x^2)$$

donde v_0, x_0 y k son constantes. Demuestre por medio de derivación implícita que

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

siempre que $v \neq 0$.

47. La curva $x^2 - xy + y^2 = 16$ es una elipse con centro en el origen y con la recta $y = x$ como su eje mayor. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los dos puntos donde la elipse interseca al eje x.

48. Encuentre todos los puntos sobre la curva $x^2y - xy^2 = 2$ en donde la recta tangente es vertical, esto es, en donde $dx/dy = 0$.

49. ¿A qué altura h debe estar el foco de la figura 5, si el punto $(1.25, 0)$ está en el borde de la región iluminada?

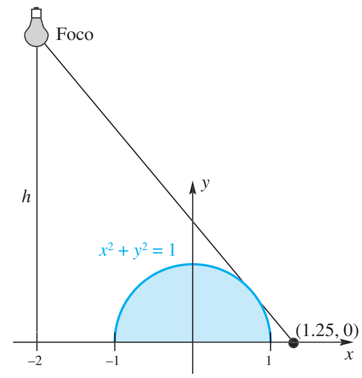

Figura 5

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $9/(x^3 - 3)$
2. $3y^2\frac{dy}{dx}$ **3.** $x \cdot 2y\frac{dy}{dx} + y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 3x^2$
4. $\frac{p}{q}x^{p/q-1}$; $\frac{5}{3}(x^2 - 5x)^{2/3}(2x - 5)$

2.8 Razones de cambio relacionadas

Si una variable y depende del tiempo t, entonces su derivada dy/dt se denomina **razón de cambio con respecto al tiempo,** o sólo **razón de cambio**. Por supuesto, si y mide la distancia, entonces esta razón de cambio también se llama velocidad. Estamos interesados en una amplia variedad de razones de cambio: la razón a la que fluye agua al interior de un depósito, la tasa a la cual el área de un derrame de petróleo está creciendo, la razón a la cual el valor de una propiedad está aumentando, etcétera. Si y se da de manera explícita en términos de t, el problema es sencillo; sólo derivamos y luego evaluamos la derivada en el instante requerido.

Puede ser que, en lugar de conocer a y de manera explícita en términos de t, conozcamos una relación que relaciona a y y a otra variable x, y que también conozcamos algo acerca de dx/dt. Aún podemos ser capaces de encontrar dy/dt, ya que dy/dt y dx/dt son **razones de cambio relacionadas** (o razones afines). Por lo regular, esto requiere derivación implícita.

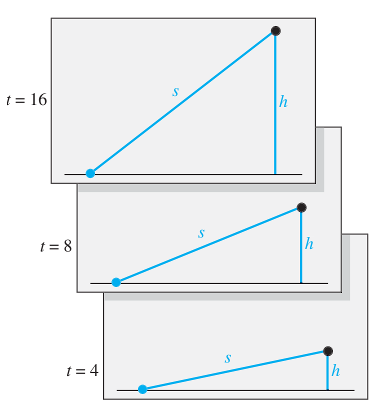

Figura 1

Dos ejemplos sencillos En la preparación de un procedimiento sistemático para la resolución de problemas con tasas de cambio relacionadas, estudiamos dos ejemplos.

EJEMPLO 1 Se suelta un pequeño globo en un punto a 150 pies alejado de un observador, quien se encuentra en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de 8 pies por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando éste se encuentra a 50 pies de altura?

SOLUCIÓN Sea t el número de segundos contados a partir de que se suelta el globo. Sea h la altura del globo y s su distancia al observador (véase la figura 1). Tanto h como s son variables que dependen de t; sin embargo, la base del triángulo (la distancia des-